دراســـة الـــدوال

I- أنـشطــة :

1- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[2,+\infty[$

بـ : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

(ℓ_f) هـو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب $f(2)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- أ- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

ب- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]2,+\infty[$ ، واعط جدول تغيراتها.

3- بين أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

وأول النتيجة هندسيا.

الجــواب :

1-

$$f(2) = 2 - 1 + \sqrt{2^2 - 3\times 2 + 2}$$
$$= 2 - 1 + \sqrt{4 - 6 + 2}$$
$$= 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

و : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2}$

$$= +\infty$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2- أ-

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 1}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} \frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)^2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1+\sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1+\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$= 1+(+\infty)$$

$$= +\infty$$

• استنتـاج :

في 2 على اليمين ℓ_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى.

ب- لدينا : $f(x) = x-1+\sqrt{x^2-3x+2}$

إذن : $f'(x) = 1+\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ $\quad \forall x\in]2,+\infty[$

وبما أن : $x \succ 2$

$2x-3 \succ 0$

ومنه : $f'(x) \succ 0$ $\quad \forall x\in]2,+\infty[$

جـدول تغيـرات f :

x	**2** $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	**1** ↗ $+\infty$

3- لنبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(2x-\frac{5}{2}\right) = 0$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(2x-\frac{5}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x-1+\sqrt{x^2-3x+2}-2x+\frac{5}{2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-x+\frac{3}{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+x-\frac{3}{2}}$$

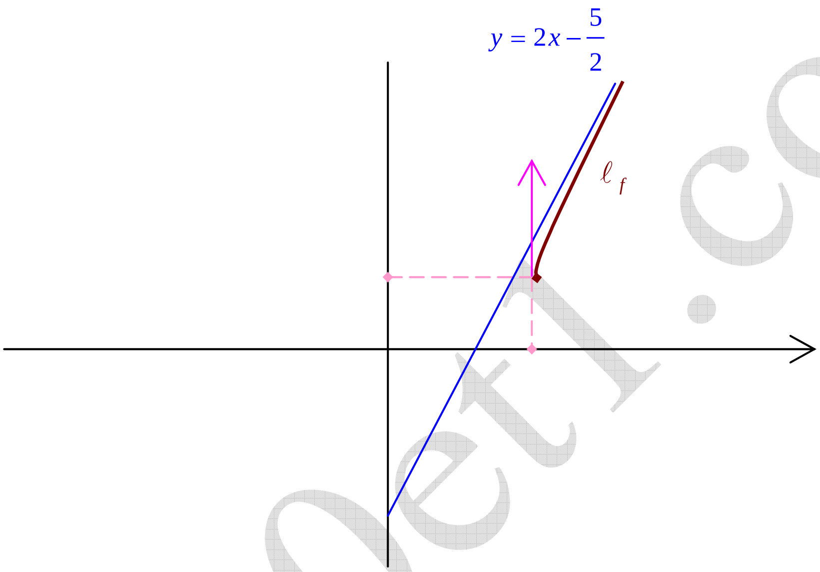
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4}}{+\infty} = 0$$

إذن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

وبالتالي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - \frac{5}{2}$ مقارب مائل لـ ℓ_f بجوار $+\infty$.



تمريــن 2 :

لتكن f الدالة المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$$

1) حدد D_f.

2) أحسب النهايات عند محدات D_f.

3) بين أن لكل x من $]0,4[$:

$$f'(x) = \frac{x - 2}{\left(4x - x^2\right)\sqrt{4x - x^2}}$$

اعط جدول تغيرات f.

4) أنشئ ℓ_f.

5) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f.

الجــواب :

1) تحديد مجموعة التعريف :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 4x - x^2 \succ 0\right\}$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن : $D_f = \left]0\ ,\ 4\right[$

2) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = +\infty$$

3) حساب $f'(x)$ لكل x من $\left]0,4\right[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = \left(4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(4x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(4-2x)$$

$$= \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

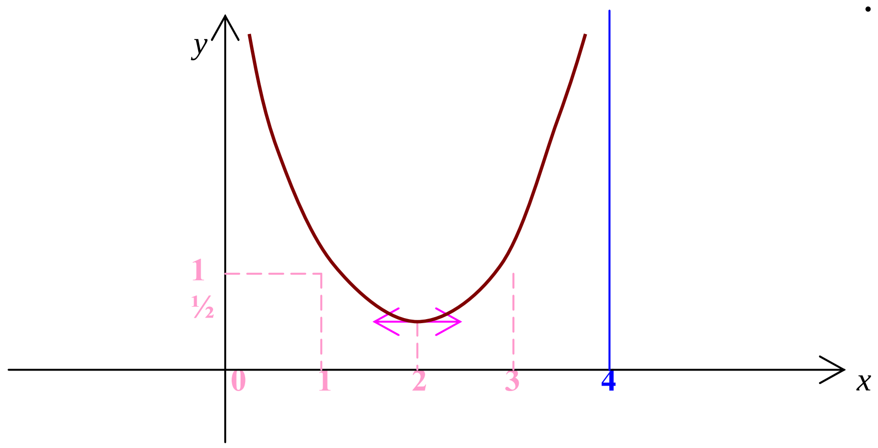
$$= \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)^{\frac{2}{2}} \times \left(4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ومنه : $$f'(x) = \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)\sqrt{4x-x^2}}$$

- جدول التغيرات :

x	0		2		4
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	½	↗	$+\infty$ ‖

4) إنشاء ℓ_f .



5) لدينا : $\forall x \in D_f \;;\quad 4-x \in D_f$

ولدينا :

$$\forall x \in D_f \;;\quad f(4-x) = \frac{1}{\sqrt{4(4-x)-(4-x)^2}}$$

$$\forall x \in D_f \;;\quad f(4-x) = \frac{1}{\sqrt{16-4x-16+8x-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$= f(x)$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f.

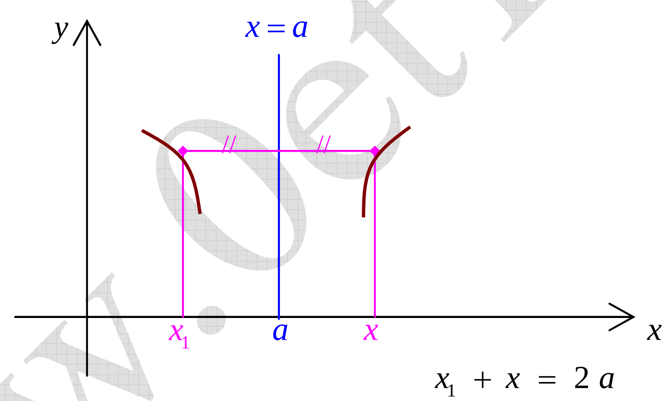
تذكيـــر :

1- محـــور تماثـل ℓ_f :

نقول أن المستقيم $D(x=a)$ محور تماثل (ℓ_f) إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in D_f \;;\quad 2a-x \in D_f$$

و $\quad f(2a-x) = f(x)$



لدينا : $x_1 + x = 2a$

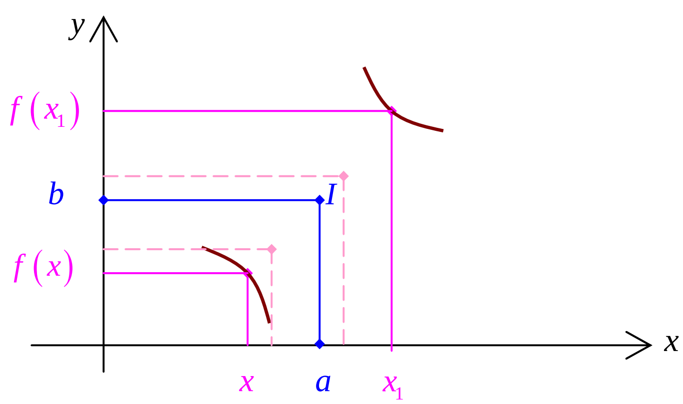
إذن : $x_1 = 2a - x$

$f(x_1) = f(x)$

ومنه : $f(2a - x) = f(x)$

2- مركز تماثـل ℓ_f

لتكن $I(a,b)$.



$x_1 + x = 2a$

$$f(x_1) + f(x) = 2b$$
$$x_1 = 2a - x$$
$$f(x_1) = 2b - f(x)$$

ومنه : $f(2a - x) = 2b - f(x)$

خاصيـة :

تكون النقطة $I(a,b)$ مركز تماثل لـ ℓ_f إذا وفقط إذا كان :

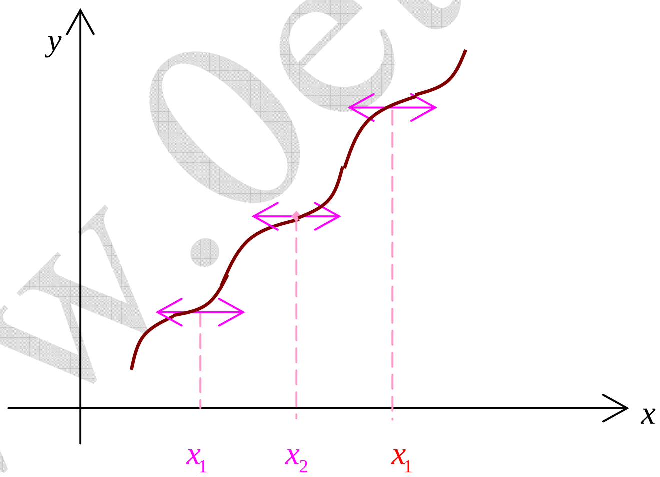
- $\forall x \in D_f \; ; \quad 2a - x \in D_f$
- $\forall x \in D_f \; ; \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$

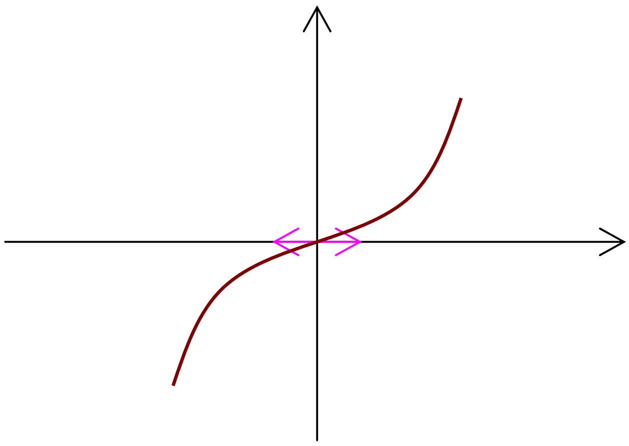
ملخـص :

1- قابلية الاشتقـاق ورتـابـة دالـة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I.

- إذا كان لكل x من I : $f'(x) = 0$ فإن : f ثابتـة على I.
- إذا كان لكل x من I، $f'(x) \succ 0$ (يمكن لـ f' أن تنعدم في عدد منته من النقط).
  فإن : f تزايدية قطعا على I.
- إذا كان لكل x من I، $f'(x) \prec 0$ (يمكن لـ f' أن تنعدم في عدد منته من النقط).
  فإن : f تناقصية قطعا على I.





2- مطـارف دالـة :

دراسة الدوال ذ الرقبة

a- القيـم القصـوى

لتكن $x_0 \in I$ و $I \subset D_f$

نقول أن $f(x_0)$ قيمة قصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I \; ; \quad f(x) \leq f(x_0)$$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على : $I = [a,b]$ و $x_0 \in I$

العدد $f(x_0)$ هو قيمة قصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in [a, x_0[\; ; \quad f'(x_0) \succ 0$$

و $\forall x \in]x_0, b] \; ; \quad f'(x_0) \prec 0$

و $f'(x_0) = a$

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$		

b- القيـم الدنيـا

$x_0 \in I$ ، $I \subset D_f$

نقول أن $f(x_0)$ قيمة دنيا للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I \; ; \quad f(x) \geq f(x_0)$$

خاصيـة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I مركزه x_0 ،
يكون $f(x)$ مطرافـا إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' تنعدم في x_0 وتتغير إشارتها.

3- تقعـر منحنى دالـة ونقط الانعطـاف :

تعريـف :

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I و (ℓ_f) المنحنى الممثل لها.

نقول أن المنحنى (ℓ_f) محدب (أو تقعر المنحنى موجه نحو الأراتيب الموجبة) إذا وفقط إذا كان ℓ_f فوق جميع مماساته.

ونقول أن المنحنى (ℓ_f) مقعر إذا وفقط إذا كان ℓ_f تحت جميع مماساته.



خاصيـة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على I .

و $\left(\ell_f\right)$ المنحنى الممثل لها.

- إذا كانت f'' موجبة على I فإن ℓ_f محدب.
- إذا كانت f'' سالبة على I فإن ℓ_f مقعـر.
- إذا انعدمت f'' في x_0 $\left(x_0 \in I\right)$ وتغير إشارتها فإن النقطة $I\left(x_0 , f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطـاف.

4- الفـروع اللانهائيـة Branches infinies

ليكن ℓ_f المنحنى الممثل للدالة f.

نقول أن $\left(\ell_f\right)$ يقبل فرعا لانهائيا إذا وفقط إذا آلت x أو $f\left(x\right)$ إلى ∞.

$$\ell_f = \left\{M\left(x , f\left(x\right)\right) \;/\; x \in D_f\right\}$$

a- المستقيمـات المقاربــة لمنحنى :

-1 إذا كانت $\left|\lim_{x \to x_0^-} f\left(x\right)\right| = +\infty$ أو $\left|\lim_{x \to x_0^+} f\left(x\right)\right| = +\infty$

فإن المستقيم $\left(x = x_0\right)$ مقارب عمودي لـ $\left(\ell_f\right)$.

-2 إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) = b$

فإن المستقيم $\left(y = b\right)$ مقارب أفقـي لـ $\left(\ell_f\right)$ بجوار ∞.

-3 إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) - \left(a x + b\right) = 0 \quad \left(a \neq 0\right)$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ $\left(\ell_f\right)$ بجوار ∞.

-4 إذا كانت $f\left(x\right) = a x + b + h\left(x\right)$ حيث $\lim_{x \to \infty} h\left(x\right) = 0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ $\left(\ell_f\right)$ بجوار ∞.

-5 يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقاربا لـ $\left(\ell_f\right)$ بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) - a x = b \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = a$$

$$\left(a \in \mathbb{R}^* , \; b \in \mathbb{R}\right) \quad \text{أو} \quad \left(a , b\right) \in \mathbb{R}^2$$

b- الاتجـاهـات المقاربـة :

-1 إذا كانت

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \infty$$

فإن : $\left(\ell_f\right)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

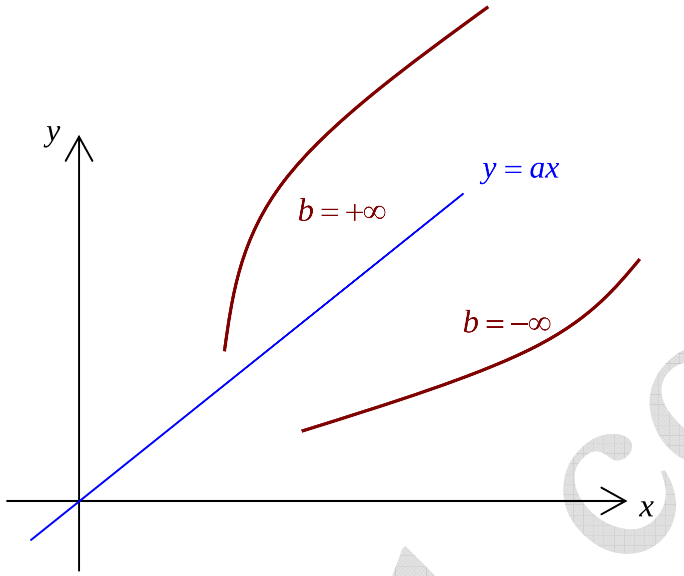
-2 إذا كانت $\lim_{+\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = 0$

فإن : $\left(\ell_f\right)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞.

-3 إذا كانت $\lim_{x \to \infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

و : $\lim f(x) - ax = \infty$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ بجوار ∞.



خـلاصـــة :

